

Interferenz von Wahrscheinlichkeiten

Stefan Heusler & Hans Joachim Schlichting

Institut für Didaktik der Physik
Wilhelm-Klemm-Str. 10, 48149 Münster
(Eingegangen: 25.07.2007; Angenommen: 14.04.2008)

Kurzfassung

Die Quantenmechanik ist durch zwei wesentliche Eigenschaften charakterisiert, die sich auf elementare Weise erklären lassen: Interferenz und Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Photon von einem semitransparenten Spiegel reflektiert wird, ist durch eine reelle, positive Zahl p gegeben. Die Addition zweier klassischer, also positiver Wahrscheinlichkeiten kann allerdings niemals zu einer gegenseitigen Auslöschung führen. Genau dies findet aber bei destruktiver Interferenz statt, zu der einzelne Photonen sehr wohl in der Lage sind. Dieser Widerspruch zeigt, dass klassische Wahrscheinlichkeiten alleine nicht ausreichen, um das Verhalten von Photonen zu beschreiben. Es muss somit eine Theorie gefunden werden, bei der Wahrscheinlichkeiten miteinander destruktiv interferieren können. In der Quantenphysik gelingt dieser Kunstgriff durch die Einführung der Wahrscheinlichkeitswelle ψ . Diese elementaren Ideen werden zunächst durch musikalische und visuelle Analogien illustriert und anschließend mathematisch erläutert.

1. Einführung: Das Problem

Unser Ziel ist es, eine elementare und für die Schule leicht zugängliche Einführung der quantenmechanischen Wellenfunktion ψ und des Pfadintegralformalismus zu geben. Hierfür sind lediglich zwei Experimente notwendig.

Zunächst betrachten wir Transmission und Reflektion eines einzelnen Photons an einem semitransparenten Spiegel. Das Photon wird mit einer Wahrscheinlichkeit $p_R=1/2$ reflektiert, und mit $p_T=1/2$ transmittiert. Ob das einzelne Photon den ersten (T) oder zweiten (R) Weg wählt, lässt sich prinzipiell nicht vorhersagen.

Weiterhin betrachten wir das Doppelspaltexperiment. Experimentell stellt sich heraus, dass ein Interferenzmuster entsteht: Durch die Öffnung eines zweiten Spalts kann die Intensität an einem Punkt x *verringert* werden.

Dies führt zu folgender elementarer Problematik: Wahrscheinlichkeiten sind immer Zahlen zwischen Null und Eins. Die Addition von Wahrscheinlichkeiten, z.B. für Spalt 1 and Spalt 2 im Doppelspaltexperiment, führt *niemals* zu destruktiver Interferenz. Mathematisch kann das dadurch zum Ausdruck gebracht werden, dass sich positive Zahlen nicht gegenseitig aufheben können.

Daraus folgt unmittelbar, dass die Wege von Photonen nicht mit klassischen Wahrscheinlichkeiten beschrieben werden können. Es stellt sich daher die Frage, wie der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit von Photonen beschaffen sein muss, damit ihr Interferenzverhalten erfasst werden kann. Heisenberg bezeichnet die interferenzfähige Wahrscheinlichkeit als den „Kernpunkt der Quantentheorie“ [1].

2. Interferenz und Wahrscheinlichkeit: Musikalische und visuelle Analogien

Für die Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs betrachten wir eine Variante des Galtonschen Nagelbretts (Abb. 1). Kugeln fließen durch Räume mit jeweils zwei Ein- und zwei möglichen Ausgängen. Die „Eckzimmer“ haben nur einen Eingang. Alle Kugeln starten im Raum „Null“ ganz oben in der Pyramide. Im ersten „Stockwerk“ gibt es zwei Zimmer, im zweiten Stockwerk drei, im n -ten Stockwerk $(n+1)$ Zimmer. In einem Animationsfilm zeigen wir, wie sich die Kugeln in den verschiedenen Zimmern *verteilen*. Da die Verteilung nicht homogen ist, sind auch die Wahrscheinlichkeiten nicht gleichmäßig verteilt. Für die Schüler unmittelbar einsichtig ist folgende einfache Regel: Wenn eine Kugel nicht nur einen, sondern mehrere Wege in ein bestimmtes Zimmer gehen kann, dann *vergrößert* dies die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel dieses Zimmer erreicht. Durch Hinzufügen eines weiteren „Kanals“ bzw. Weges wird die Wahrscheinlichkeit stets größer, niemals kleiner.

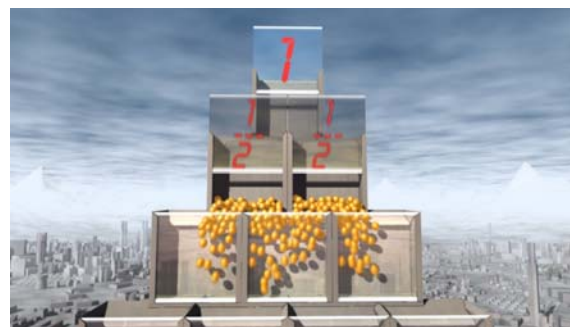


Abb. 1: Variation des Galtonschen Nagelbrett: Die Kugelpyramide.

Für die Erläuterung von Interferenzen betrachten wir eine musikalische Analogie: Ein einzelner Lautsprecher sendet einen reinen Sinuston von z.B. 200 Hz. Um den Lautsprecher herum bildet sich ein Wellenfeld. An einem bestimmten Punkt *hört* man das Wellenfeld als Ton. Wenn nun ein zweiter Lautsprecher ebenfalls einen Sinuston von 200 Hz abstrahlt, wäre die naive Erwartung, dass der Ton in jedem Fall *lauter* wird. Für Schüler und Schülerinnen ist es ein eindrückliches sinnliches Erlebnis, durch Herumlaufen im Raum festzustellen, dass dies nicht der Fall ist: Die Lautstärke schwankt. An bestimmten Orten wird der Ton durch Addition von zwei Schallwellen *leiser*.

Wellen und Wahrscheinlichkeiten verhalten sich also sehr verschieden: Durch Addition von Wellen kann es zu gegenseitiger Auslöschung kommen. Addition von Wahrscheinlichkeiten kann niemals zu gegenseitiger Auslöschung der Wahrscheinlichkeiten führen.

Nach diesen beiden Beispielen sieht es so aus, als ob Wellen und Wahrscheinlichkeiten nichts miteinander zu tun haben – wie sollen sich Wahrscheinlichkeiten gegenseitig auslöschen?

Bei der Suche nach einer Möglichkeit, das Wahrscheinlichkeitskonzept mit der Interferenzfähigkeit von *einzelnen* Photonen zu vereinigen, könnte man auf den Gedanken kommen, anstelle der Wahrscheinlichkeit, p_R dass ein Photon am semitransparenten Spiegel reflektiert wird, die Wurzel aus der Wahrscheinlichkeit zu betrachten. Denn die Wurzel kann sowohl positiv als auch negativ sein und somit die Auslöschung und Verstärkung bei der Interferenz erfassen. Zur „echten“ Wahrscheinlichkeit mit positiven Werten käme man dann durch Quadrieren der „Wurzelwahrscheinlichkeiten“:

$$\left(-\sqrt{p_R}\right)^2 = \left(+\sqrt{p_R}\right)^2 = p_R$$

Die Sache hat nur einen Haken. Die damit erzielten Ergebnisse stimmen nicht mit den experimentellen Ergebnissen überein, wonach durch Interferenz nicht nur totale Auslöschung und maximale Verstärkung entsteht, sondern kontinuierlich viele Zwischenwerte. Benutzt man dementsprechend statt des Vorzeichens eine komplexe Phase φ , so gelangt man zu einem fundamentalen Wahrscheinlichkeitskonzept, das die experimentellen Befunde vollständig zu befriedigen vermag [1]. Da nämlich

$$\left|\exp[i\varphi]\right|^2 = 1,$$

spielt die Phase nach Bildung des Betragsquadrates keine Rolle mehr. Der Zusammenhang zwischen der Größe

$$\sqrt{p_R} \exp[i\varphi]$$

und der Wahrscheinlichkeit p_R für Reflektion des Photons am semitransparenten Spiegel ist dann durch Betragsbildung gegeben:

$$\left|\sqrt{p_R} \exp[i\varphi]\right|^2 = p_R$$

Man erkennt sofort, dass der Spezialfall $\varphi = \pi$ dem negativen Vorzeichen entspricht. Wenn das Photon nur einen Weg gehen kann, spielt die Phase keine Rolle. Die Phase eröffnet aber die Möglichkeit, dass bei Überlagerung Interferenzen auftreten, da sowohl positive wie auch negative Werte auftreten können.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass es keinerlei zwingende mathematische Gründe gibt, eine komplexe Phase φ einzuführen. Das Ziel, Interferenzefekte und den Wahrscheinlichkeitsbegriff miteinander zu kombinieren, führt nicht zu einer eindeutigen mathematischen Beschreibung. Wie weiter unten noch gezeigt wird, ist dieser Ansatz einerseits dadurch motiviert, dass er im Limes einer großen Anzahl von Photonen in das klassische Wellenbild übergeht, andererseits auch die experimentell nachgewiesenen Interferenzen bei sehr verdünnten Laserstrahlen zu beschreiben vermag.

Die „komplexe Wurzel“ aus der Wahrscheinlichkeit ist die sogenannte Wahrscheinlichkeitswelle oder Wellenfunktion ψ eines bestimmten Weges:

$$\psi = \sqrt{p} \exp[i\varphi], \quad |\psi|^2 = p.$$

Im Feynman'schen Zeigerformalismus wird ψ als Vektor mit der „Wurzel aus der Wahrscheinlichkeit“ als Radius in dem Phasenwinkel φ dargestellt [2]. Für eine Lichtwelle mit fester Frequenz $f = \omega/(2\pi)$ rotiert die Phase wie $\varphi = \omega t$. Für sichtbares Licht ist die Rotationsfrequenz im Bereich von 10^{15} Hz. Aber auch für eine Schallwelle lässt sich der Zeigerformalismus anwenden: Für den Kammerton A ist die Rotationsfrequenz 440 Hz. Lediglich die Interpretation des Formalismus ist verschieden: Im Gegensatz zu Licht wird $|\psi|^2$ bei Schallwellen nicht als Wahrscheinlichkeit interpretiert, sondern als Schallintensität. Wie später genauer gezeigt wird, wird für eine große Anzahl von Photonen aus der „Wahrscheinlichkeitsverteilung“ ebenfalls eine „Intensitätsverteilung“.

Der Zeigerformalismus lässt sich sehr einfach verallgemeinern und visualisieren. Wir betrachten die Vektoraddition $\psi_1 + \psi_2$ von zwei gleichmäßig rotierenden „Zeigern“. Der resultierende Vektor hängt von 5 Parametern ab, den Radien und Rotationsgeschwindigkeiten beider Zeiger, sowie von der Phasendifferenz bei $t=0$. Wir veranschaulichen zwei fundamentale Kombinationen:

- a. Die „Schwebung“
- b. Die „destruktive Interferenz“

Die Schwebung ergibt sich durch Addition von zwei rotierenden „Zeigern“ mit leicht unterschiedlicher Rotationsfrequenz. Betrachtet man als Welle eine „Schallwelle“, so erhält man eine zeitliche Schwankung der Schallintensität an einem festen Raumpunkt (Abb. 2).



Abb. 2: Die Schwebung wird von zwei rotierenden Zeigern mit leicht verschobener Rotationsfrequenz erzeugt.

Die destruktive Interferenz ergibt sich durch Addition von zwei mit gleicher Frequenz rotierenden „Zeigern“ mit verschobenen Phasen φ_1 , φ_2 . Je nach Raumpunkt verschiebt sich die Phasendifferenz $\Delta\varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2$. Auf eine Schallwelle bezogen erhält man nunmehr eine räumliche Schwankung der Intensität bei zeitlich konstanter Intensität.

Schwebung und Interferenz lassen sich bei klassischen Wellen wie bei Quanten beobachtbaren.

Im Doppelspaltexperiment mit Photonen der Energie $E = h f$ entspricht die Rotationsfrequenz einfach E/h , wobei h das Plancksche Wirkungsquantum ist. Die Phasenverschiebung für kohärentes Licht ergibt sich aus einer einfachen geometrischen Betrachtung. Das Resultat ist eine räumliche Schwankung der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Für sehr viele Photonen ist die Lichtintensitätsverteilung ein Abbild dieser räumlichen Schwankung der Wahrscheinlichkeitswelle.



Abb. 3: Destruktive Interferenz: Zwei Zeiger rotieren mit derselben Frequenz, die Phasendifferenz $\Delta\varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2$ ist nahe 180° bei zeitlich konstanter Intensität.

Üblicherweise wird in der Schule von „Lichtwellen“ gesprochen, die sich ähnlich wie Schallwellen gegenseitig auslöschen können. Wie wir später genauer zeigen, ist diese Analogie nur im Limes sehr vieler Photonen gerechtfertigt. Um das Verhalten einzelner Photonen beim Doppelspaltversuch zu verstehen, brauchen wir die Interpretation von $p(x) = |\psi(x)|^2$ als *Wahrscheinlichkeit*, das Photon am Punkt x zu detektieren. Hier hilft das Galtonsche Brett als Vergleich: Für die einzelne Kugel kann nur eine Wahrscheinlichkeit p dafür angegeben werden, wo sie hinfällt. Wenn man allerdings sehr viele Kugeln gleichzeitig betrachtet, ergibt sich immer dieselbe „Intensitätsverteilung“. Noch einfacher und ebenso treffend ist folgende Situation: Wer einmal eine Münze wirft, kann für das Endergebnis vor der Beobachtung nur eine Wahrscheinlichkeit $p=1/2$ für Kopf oder Zahl angeben. Wer $n=100$ Münzen wirft, kann mit einiger Genauigkeit vorhersagen, dass ca. 50 mal die eine, und 50 mal die andere Seite auftritt. Der Erwartungswert entspricht der n -fachen Addition der Wahrscheinlichkeit p jedes einzelnen Wurfes, also $n \cdot p$. Die

Schwankungen um diesen „Erwartungswert“ werden mit zunehmender Zahl der geworfenen Münzen immer kleiner. Obwohl der fundamentale Prozess ein stochastischer ist, ist das Endergebnis innerhalb wohl definierter Grenzen somit sehr gut vorhersagbar.

Für das einzelne Photon im Doppelspalt ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung aus folgender einfachen Regel: Nicht die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Wege, sondern die interferenzfähigen Wahrscheinlichkeitswellen für die Wege müssen addiert werden. Der quadrierte Radius der resultierenden Wahrscheinlichkeitswelle $\psi_{\text{Weg 1}} + \psi_{\text{Weg 2}}$ ergibt die klassische Wahrscheinlichkeit, also

$$p(x) = \left| \sqrt{p_1} \exp[i\varphi_{\text{Weg 1}}] + \sqrt{p_2} \exp[i\varphi_{\text{Weg 2}}] \right|^2 \\ = p_1 + p_2 + 2\sqrt{p_1 p_2} \cos[\varphi_{\text{Weg 1}}(x) - \varphi_{\text{Weg 2}}(x)]$$

Hierbei ist $p(x)$ die Wahrscheinlichkeit, das einzelne Photon im Bereich $(x, x+dx)$ des Schirms anzu treffen. Die x -Abhängigkeit der Vorfaktoren $p_{1,2}(x)$ haben wir nicht explizit geschrieben. Um die Minima von der Summe $p(x)$ zu bestimmen, ist nur die x -Abhängigkeit der Phasendifferenz $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ von Bedeutung.

Wenn nicht nur ein Photon, sondern viele Milliarden Photonen pro Millisekunde durch den Doppelspalt durchströmen, muss eine Summe über eine große Anzahl N von Termen betrachtet werden. Die „klassischen“ Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Photonen werden einfach addiert, und das Resultat $N(p_1 + p_2)$ wäre analog zu dem Beispiel von 100 Münzwürfen oder sehr vielen Kugeln im Galtonschen Brett zu verstehen. Auch beim Doppelspaltexperiment wird immer dasselbe Intensitätsbild beobachtet, und der zugrundeliegende stochastische Prozess wird nicht mehr wahrnehmbar, weil die Schwankungen um den Erwartungswert zu klein sind. In diesem Punkt verhalten sich klassische Wahrscheinlichkeiten ganz analog wie $|\psi(x)|^2$. Das ist nicht weiter verwunderlich, denn $p(x) = |\psi(x)|^2$ ist schließlich eine Wahrscheinlichkeit. Der einzige Unterschied zwischen klassischen und Quantenteilchen besteht darin, dass auf der Ebene der „Wellenfunktion“ $\psi(x)$ Interferenzeffekte auftreten können. Wann spielen Interferenzeffekte eine Rolle? Das ist genau dann der Fall, wenn bei den vielen verschiedenen Interferenztermen die Phasen kohärent sind. Kohärenz bedeutet *nicht*, dass für verschiedene Photonen eine feste Phasenbeziehung herrscht, sondern lediglich, dass die *Phasendifferenz* immer gleich groß ist.

Wenn das Licht kohärent ist (z.B. beim Laser), ist der Erwartungswert für die Anzahl von Photonen, also die Lichtintensität, einfach durch Multiplikation von $p(x)$ mit der Anzahl N von Photonen gegeben.

Wenn das Licht nicht kohärent ist, sind die Phasenbeziehungen für Weg 1 und Weg 2 für das *einzelne*

Photon zufällig verteilt. Ein Detektor registriert stets ein zeitlich gemitteltes Signal, bei dem der Kosinus ebenso häufig positive wie negative Werte annimmt. Die Summe über alle diese zufälligen positiven und negativen Interferenzterme ergibt Null. Für inkohärentes Licht (z.B. einer Glühbirne) mitteln sich somit alle Interferenzterme heraus, und die Wahrscheinlichkeit, ein Photon am Ort x zu treffen, kann durch die Öffnung eines zweiten Spalts nur größer werden, niemals kleiner.

Die klassische Wahrscheinlichkeit $p_1(x)$ bzw. $p_2(x)$ dafür, dass das Licht durch Spalt 1 (Spalt 2) zu dem Punkt x geht, ist stets positiv. Die Gesamtwahrscheinlichkeit wird in diesem Fall durch einfache Addition erhalten.

Für den Schulunterricht sind die Visualisierung des Galtonschen Bretts und des Zeigerdiagramms sowie die akustische Interferenz von Schallwellen die anschauliche Grundlage dafür, das Wesen der Quantenmechanik – die Interferenzfähigkeit von Wahrscheinlichkeiten, eindrücklich zu illustrieren. Für die Illustration des Doppelspaltexperiments und anderer Interferenzexperimente (z.B. des Mach-Zehnder Interferometers) mit einzelnen Photonen stehen ferner gute Simulationsprogramme zur Verfügung, die direkt im Schulunterricht eingesetzt werden können [3].

In den folgenden Abschnitten werden wir die skizzierten Ideen weiter vertiefen und mathematisch begründen.

3. Wahrscheinlichkeit und Interferenz:

Mathematische Beschreibung

Nach den qualitativen Vorüberlegungen kann man feststellen, dass die gesuchte Theorie für das einzelne Photon, die über das klassische Wellenbild hinausgeht, folgende Eigenschaften erfüllen muss:

1. Für sehr viele Photonen muss das bekannte Interferenzbild der Intensitätsverteilung reproduziert werden, das durch die klassische Wellenoptik erklärt werden kann.
2. Für einzelne Photonen muss die Theorie Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Wege angeben können und
3. Selbstinterferenz ermöglichen.

Ihnen liegen die folgenden experimentellen Befunde zugrunde:

1. Kohärentes Licht (Laserlicht) zeigt beim Doppelspaltexperiment Interferenzeffekte.
2. Einzelne Photonen werden von einem halbdurchlässigen Spiegel zufällig reflektiert bzw. durchgelassen.
3. *Einzelne* Photonen die beim Doppelspaltexperiment nacheinander auf dem Schirm fallen, bringen nach und nach dasselbe Interferenzbild hervor, das bei gleichzeitigem Beschuss mit vielen Photonen auf einmal entsteht.

Zur Beschreibung des zweiten experimentellen Befundes wird vom Galtonsche Nagelbrett als einer einfachen klassischen Analogie ausgegangen. Lässt man die Kugeln über das Brett laufen, so fallen sie mit der Wahrscheinlichkeit $p=1/2$ jeweils nach rechts und nach links. Nach n Schritten kann jede Kugel k mal nach rechts, und $(n-k)$ mal nach links gefallen sein, mit $k = 0, 1, \dots, n$. Die Wahrscheinlichkeit, bei n Schritten k mal nach rechts, und $(n-k)$ mal nach links zu fallen, ist gegeben durch

$$p(n, k) = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Lässt man nun eine sehr große Anzahl N von Kugeln auf einmal über das Brett laufen, so ergibt sich als Erwartungswert für die Anzahl der Kugeln auf Position k in Stockwerk n einfach $I_n(k) = N p(n, k)$. Dies entspricht der N -fachen Addition der Wahrscheinlichkeit $p(n, k)$. Der Zusammenhang zum Beispiel von $n=100$ Münzen, die *gleichzeitig* geworfen werden, ist wie folgt. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Wurf k Münzen Kopf und $(n-k)$ Münzen Zahl sind, ist durch $p(n, k)$ gegeben. Wenn nicht nur einmal, sondern $N=400$ Mal das Experiment mit $n=100$ Münzen wiederholt wird, erhält man die Intensitätsverteilung $I_n(k) = N p(n, k)$ von Ereignissen. Jede der 400 Kugeln, die in das Stockwerk Nummer $n = 100$ des Galtonschen Bretts gefallen ist, repräsentiert somit einen Münzwurf mit 100 Münzen. Die Position „ k “ im Stockwerk $n = 100$ repräsentiert die Anzahl von Ereignissen „Kopf“ bei einem Wurf von 100 Münzen. Der Erwartungswert ist gegeben durch

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^n k p(n, k) = \frac{n}{2}$$

Die Intensitätsverteilung $I_n(k) = N p(n, k)$ hat ein scharfes Maximum bei der Konfiguration $k=n/2$, also Hälfte der Münzen Kopf, Hälfte der Münzen Zahl und kann gut durch eine Gaußverteilung genähert werden.

Dieses Beispiel macht klar, wie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(n, k)$ mit einer „Intensitätsverteilung“ $I_n(k)$ zusammenhängt: Für die einzelne Kugel kann lediglich eine Wahrscheinlichkeit angegeben werden, an welchem Ort sie sich nach n Schritten befindet. Für sehr viele Kugeln hat die Verteilungsfunktion $I_n(k) = N p(n, k)$ ein sehr scharfes Maximum bei $k=n/2$. Das Gesamtverhalten wird immer besser vorhersagbar, wenn entweder n oder N groß sind – oder natürlich n und N . Hierbei spielt es keine Rolle, ob alle Kugeln „gleichzeitig“ oder „nacheinander“ herunter fallen. Im ersten Fall handelt es sich um ein Experiment mit N Kugeln gleichzeitig. Im zweiten Fall handelt es sich um N Experimente mit jeweils einzelnen Kugeln. Man kann daher davon ausgehen, dass Wechselwirkungen zwischen den Kugeln vernachlässigbar oder zumindest für das Endergebnis irrelevant sind. Würde man das Experiment immer nur mit sehr

vielen Kugeln machen, bräuchte man überhaupt nicht mehr von Wahrscheinlichkeiten $p(n, k)$ zu sprechen, denn das Endergebnis für die beobachtete Häufigkeitsverteilung bzw. „Intensitätsverteilung“ $I_n(k) = N p(n, k)$ wäre praktisch eindeutig determiniert.

Eine zum Verständnis des Pfadintegrals von Feynman wichtige Eigenschaft der Verteilungsfunktion $p(n, k)$ ergibt sich aus der folgenden Beobachtung: Jeder mögliche Weg von Zimmer $(0, 0)$ nach (n, k) trägt additiv zu der Wahrscheinlichkeit bei. Gibt es nur einen einzigen Weg W , ist die Wahrscheinlichkeit einfach $p_W = (1/2)^n$. Da es genau $n!/(k!(n-k)!)$ verschiedene Wege von $(0, 0)$ zum Zimmer (n, k) gibt, und da jeder Weg gleichwahrscheinlich ist, erhalten wir $p(n, k)$ als „Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Wege“, also

$$p(n, k) = \sum_{\text{Weg } W \text{ nach } (n, k)} p_W$$

Der einzige und alles entscheidende Unterschied zwischen Kugeln auf dem Galtonschen Brett und Quantenteilchen wie dem Photon besteht darin, dass das Photon *interferieren* kann. Allerdings spielt es auch beim Doppelspaltexperiment mit kohärentem Laserlicht für die resultierende Gesamtintensitätsverteilung keine Rolle, ob einzelne Photonen nacheinander oder viele Photonen auf einmal das Intensitätsmuster aufbauen. Hieraus folgt, dass eine Wechselwirkung zwischen den Photonen nicht in Betracht kommt bzw. für die Gesamtintensitätsverteilung zumindest für großes N irrelevant ist. Daraus ergibt sich die erstaunliche Schlussfolgerung, dass jedes einzelne Photon *mit sich selber interferiert*.

Nehmen wir einmal an, das einzelne Photon geht mit der Wahrscheinlichkeit $p_1(x)$ durch Spalt 1 zum Punkt x auf dem Schirm, und mit $p_2(x)$ durch Spalt 2 zum Punkt x . Da es keine Möglichkeit gibt, dem Photon einen bestimmten Weg nach x vorzuschreiben, kann man die Wahrscheinlichkeiten für diese Wege versuchsweise addieren, $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$.

Dieser Ansatz ist aber falsch, weil sich Wahrscheinlichkeiten verschiedener Wege nicht kompensieren können. Wie oben plausibel gemacht wurde, ergeben sich die klassischen Wahrscheinlichkeiten $p(x)$ aus einer fundamentalen Größe, aus der „Wurzel aus der Wahrscheinlichkeit, multipliziert mit der Phase“, oder der Wahrscheinlichkeitswelle ψ ,

$$\psi = \sqrt{p} \exp[i\varphi], \quad |\psi|^2 = p$$

Beim Doppelspaltexperiment interferiert jedes einzelne Photon mit sich selber, indem jedem der möglichen Wege nicht eine Wahrscheinlichkeit p_W , sondern eine Wahrscheinlichkeitswelle ψ_W zugeordnet wird. Nicht die Wahrscheinlichkeiten p_W für alle möglichen Wege zum Punkt x , sondern die entsprechende Wahrscheinlichkeitswelle ψ_W muss für alle Wege miteinander addiert werden:

$$p(x) = |\psi(x)|^2 = \left| \sum_{\substack{\text{Weg } W \\ \text{nach } x}} \psi_W(x) \right|^2$$

Diese Formel beschreibt Feynmans Pfadintegralansatz [2], [4, 5, 6]. Wir betonen nochmals, dass beim Übergang von der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik lediglich die klassische Wahrscheinlichkeit $p(x)$ für einen Weg durch die Wahrscheinlichkeitswelle $\psi(x)$ für einen Weg ersetzt wird.

Vor diesem Hintergrund lässt sich der Welle-Teilchen Dualismus formulieren: Die quadrierte Welle $|\psi(x)|^2$ ist die Wahrscheinlichkeit $p(x)$, das Teilchen am Ort x anzutreffen. Bei den meisten Experimenten, bei denen Interferenzen der Wahrscheinlichkeitswellen beobachtet werden, wird nicht $p(x)$, sondern $N p(x)$ gemessen, wobei N eine sehr große Anzahl von Photonen ist. In diesem Fall ergibt sich das Intensitätsmuster $I(x) = N p(x)$, welches auch im einfachen Wellenbild erklärt werden kann, ohne dass von Wahrscheinlichkeiten gesprochen werden müsste. Ähnlich wie beim Galtonschen Brett ist das Endergebnis für die Häufigkeits- bzw. Intensitätsverteilung quasi deterministisch, wenn sehr viele „Bälle“ gleichzeitig betrachtet werden.

4. Der klassische Grenzfall

Für „klassische“, also nicht interferenzfähige Teilchen, wird bei zwei möglichen Wegen einfach die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Weges addiert, $p_1 + p_2$. Ein quantenmechanisches Teilchen, also etwa ein einzelnes Photon wird beim Doppelspaltexperiment als Superposition $\psi_1 + \psi_2$ von Wahrscheinlichkeitswellen beider Wege beschrieben, die das Teilchen nehmen kann. Es ist sinnlos, dem Photon den einen oder anderen Weg zuzuschreiben. Der in der Gleichung

$$|\psi_1(x) + \psi_2(x)|^2 = p_1 + p_2 + 2\sqrt{p_1 p_2} \cos[\varphi_1 - \varphi_2]$$

auftretende Interferenzterm führt zur gegenseitigen Beeinträchtigung der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Pfade. Durch den Taschenspielertrick „Wurzel ziehen und Phase einführen, addieren und dann wieder quadrieren“ werden die Wahrscheinlichkeiten interferenzfähig! Der Kosinus kann im Gegensatz zu p_1 und p_2 sowohl positiv als auch negativ sein und somit zu konstruktiver und destruktiver Interferenz führen. Dieser Term ist das einzige Indiz dafür, dass unter der Ebene der klassischen Wahrscheinlichkeiten noch die tiefere Ebene der Wahrscheinlichkeitswellen liegt.

Mit diesen Vorüberlegungen ist man in der Lage, genauer zu diskutieren, unter welchen Umständen beim Doppelspaltexperiment mit sehr vielen Photonen gleichzeitig der Interferenzterm relevant bleibt, d.h. wann der Einfluss der Phasenwinkel makroskopisch sichtbar bleibt. Dazu werden nicht nur ein Photon, sondern N Photonen betrachtet, denen allen

jeweils für Weg 1 und Weg 2 eine Wahrscheinlichkeitswelle zugeordnet wird.

Die Phasendifferenz des einzelnen Photons, das an Punkt x detektiert wird, hängt von zwei Faktoren ab (Abb. 4): Einerseits ergibt der geometrische Wegunterschied der beiden Wege durch Spalt 1 und Spalt 2 ($\varphi_{s1} - \varphi_{s2}$). Dieser geometrische Phasenunterschied ist unabhängig von der Entstehungsgeschichte des Lichtfeldes. Bei der „Schülerklärung“ des Doppelspaltexperiments wird üblicherweise nur diese geometrische Phasendifferenz betrachtet. Andererseits hat das einzelne Photon bereits an der Position von Spalt 1 bzw. Spalt 2 die Phasendifferenz ($\varphi_1^0 - \varphi_2^0$) der beiden Wahrscheinlichkeitswellen $\Psi_{\text{Weg 1}}(x)$, $\Psi_{\text{Weg 2}}(x)$. Diese Phasendifferenz hängt von der komplizierten Atom-Licht Wechselwirkung und der Entstehungsgeschichte des Lichtfeldes ab. Die Gesamtphasendifferenz des Photons ist somit $\varphi_1 - \varphi_2 = (\varphi_{s1} - \varphi_{s2}) + (\varphi_1^0 - \varphi_2^0)$. Die geometrische Phasendifferenz ist für das Licht einer Glühlampe genau dieselbe wie für Laserlicht. Kohärenz bedeutet also, dass der Laserstrahl Photonen aussendet, für die die Phasendifferenz an der Position der Spalte jeweils gleich groß ist. Nur dann ist der Phasenunterschied rein geometrisch, und durch $\varphi_1 - \varphi_2 = (\varphi_{s1} - \varphi_{s2}) = \Delta\varphi$ gegeben. Wir erhalten somit die Intensitätsverteilung eines Laserstrahls am Doppelspalt,

$$I(x) = N p(x) = N \left(p_1 + p_2 + 2\sqrt{p_1 p_2} \cos[\Delta\varphi] \right).$$

Wenn die Phasenbeziehung der einzelnen Photonen an der Position von Spalt 1 und Spalt 2 zufällig verteilt ist, wie es bei einer Glühlampe der Fall ist, sind die Phasen der einzelnen Photonen zufällig verteilt. Durch destruktive Interferenz mittelt sich alle Selbstinterferenzterme $\cos[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]$ nach Summation über alle Photonen und Mittelung über eine kurze Zeitspanne heraus und wir erhalten als Intensitätsverteilung einfach die klassische Verteilung $N(p_1 + p_2)$ ohne sichtbare Interferenzen – wir sind somit zum Verhalten von klassischen Teilchen ohne Interferenz wie im einfachen Galton'schen Brett zurückgekehrt.

Durch die obigen Betrachtungen sollte deutlich geworden sein, dass Interferenzeffekte nicht entweder da sind oder nicht, sondern dass ein kontinuierlicher Übergang von geordneten zu ungeordneten Phasen von Wahrscheinlichkeitswellen einzelner Photonen der zugrundeliegende Mechanismus der Interferenz ist. Dieser Übergangsbereich wird durch die Kohärenzlänge des Lichtes beschrieben.

Im Limes von vielen Photonen erhalten wir folgende Analogie zu Schallwellen: Nur kohärente Sinustöne erzeugen ein klares Interferenzbild. Bei inkohärenten Tönen mitteln sich die Interferenzen heraus. Das menschliche Ohr als Schalldetektor hat keine unendlich kleine Zeitauflösung. Die kleinste zeitliche Auflösung ist durch die Druckperiode

gegeben: Um eine Druckschwankung der Periode T zu detektieren, muss man in etwa eine Periode abwarten. Phasenverschiebungen innerhalb dieser „Messzeit“ werden gemittelt.

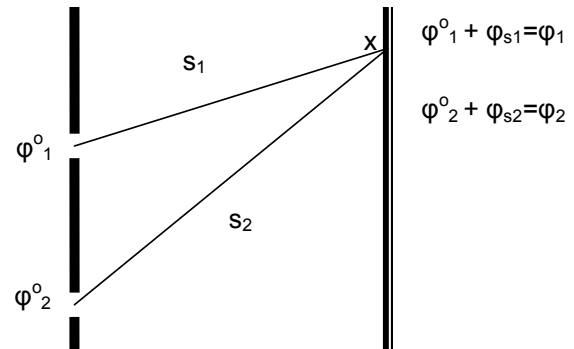


Abb. 4: Zusätzlich zur Phase φ_1^0 (φ_2^0) des Photons bei Spalt 1 (Spalt 2) ist die geometrische Phasendifferenz φ_{s1} (φ_{s2}) aufgrund der unterschiedlichen Wege zum Punkt x auf dem Schirm zu berücksichtigen. Die Gesamtphasendifferenz am Punkt x des Schirms ist $\varphi_1 - \varphi_2 = (\varphi_1^0 + \varphi_{s1}) - (\varphi_2^0 + \varphi_{s2})$.

Der einzige – und zentrale – Unterschied zwischen Lichtwellen und Schallwellen ist folgender: Bei Schallwellen bleibt auch im Limes kleiner Intensitäten die Interpretation der Schallwelle als Druckwelle unverändert bestehen – Schall ist eben einfach nur eine klassische Welle, und besteht nicht aus vielen einzelnen superpositionsfähigen Teilchen. Wird ein Volumen immer weiter evakuiert, verliert das Wort „Schallübertragung“ allmählich seine Bedeutung, da das Medium dafür fehlt. Im Gegensatz dazu treten wir bei Photonen im Limes extrem kleiner Photonendichte in eine neue Welt: In die Welt der Quantenmechanik und der superpositionsfähigen Wahrscheinlichkeitswelle ψ .

7. Literaturverzeichnis

- [1] W. Heisenberg (1958): Physikalische Prinzipien der Quantentheorie. B. I. Hochschultaschenbücher
- [2] R. Feynman (1985): QED – The Strange Theory of Light and Matter“. Princeton University Press
- [3] R. Müller (2003): Quantenphysik in der Schule. Logos Verlag Berlin.
- [4] F. Bader (1994): Optik und Quantenphysik nach Feynmans QED. In: Physik in der Schule, 7/8, S.250-256
- [5] L. Schön, J. Werner (1999): Vom Licht zum Atom. In: R. Brechel (Hrsg.): Zur Didaktik der Physik und Chemie, Probleme und Perspektiven. Leuchtturm
- [6] R. Erb (1995): Optik in der Oberstufe. In: Physik in der Schule, 33, S. 175
- [7] H. Paul (1995): Photonen. Teubner Studienbücher, S.137ff.