Physik und Didaktik in Schule und Hochschule
PhyDid 1/9 (2010), S. 18-24

Wie Schüler Formeln gliedern – eine explorative Studie

Alexander Strahl*, Ulf Schleusner*, Matthias Mohr*, Rainer Müller*

*Institut für Fachdidaktik der Naturwissenschaften
Technische Universität Braunschweig
Pockelsstr. 11, 38106 Braunschweig
a.strahl@tu-bs.de, mattze.mohr@googlemail.com, u.schleusner@gmx.de, rainer.mueller@tu-bs.de
(Eingegangen: 16.02.2009; Angenommen: 02.07.2010)

Kurzfassung

Wir berichten über die Ergebnisse einer explorativen Studie, in der untersucht wurde, nach welchen Kriterien Schülerinnen und Schüler Formeln gliedern, die ihnen vorgelegt wurden. Dabei wurde nach Chunks (für die Probanden zusammengehörige Terme) und Strukturelementen (Terme mit ähnlicher Funktion) gesucht. Weiterhin sollte der Inhalt der Formeln von den Befragten interpretiert werden. Es konnten sieben Kategorien zur Erfassung der zergliederten Formelstücke bestimmt werden. Der mathematische Umgang mit den Formeln steht für die Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler im Vordergrund. Dass es ein Formelverständnis geben könnte, das über das rein Mathematische hinausgeht, ist den Meisten nicht bewusst.

1. Einleitung

Die Physik weist einen hohen Grad an Mathematisierung auf. Formeln sind für Physiker ein effektives Mittel zur Kommunikation, weswegen Fachtexte der Physik meist stark von Formeln geprägt sind. Physikalische Sachverhalte können mit ihnen knapp und präzise dargestellt werden.

Im Gegensatz zur mathematischen Gleichung hat eine physikalische Formel eine Bedeutung: Die Formel $F = m \cdot a$ sagt etwas völlig anderes aus als $U = R \cdot I$ oder $E = h \cdot f$, obwohl die mathematische Struktur aller drei Formeln identisch ist. Die im Folgenden vorgestellten Untersuchungen sollen als Einleitung zur Forschungsfrage dienen und den Stand der Forschung charakterisieren.

Dee-Lucas und Larkin [1] sowie Müller und Heise [2] untersuchten den Einfluss physikalischer Formeln auf das Textverständnis. Die Probanden lasen einen physikalischen Text in einer von zwei Versionen: In der ersten Version wurde ein Sachverhalt mit Hilfe von Formeln dargestellt, in der zweiten Version wurde der gleiche Sachverhalt in Worten ausgedrückt.

Die Ergebnisse sind uneinheitlich: In der ersten Studie zeigten sich nur beim „Anwenden einer physikalischen Relation, die im Text benutzt wird“ signifikante Unterschiede. Dort schnitten diejenigen Studierenden besser ab, welche die Textversion ohne Formeln gelesen hatten. Dagegen war bei Müller und Heise [2] das Textverständnis der Probanden, die mit der reinen Wortversion gearbeitet hatten, signifikant schlechter. Sie äußerten darüber hinaus häufiger, dass ihnen die Bearbeitung leichter gefallen wäre, wenn sie mit Formeln hätten arbeiten können, als umgekehrt in der Formelgruppe eine formellose Textversion gewünscht wurde.

In der Mathematikdidaktik hat Malle [3, 4], ausgehend von Arbeiten von Rosnick und Clement [5], gezeigt, dass Schüler und Studenten erhebliche Schwierigkeiten beim Aufstellen und Interpretieren von Formeln haben, die einfache Alltagssituationen beschreiben. In einer der Aufgaben sollte die folgende Aussage in eine Formel gefasst werden: „*An einer Universität sind P Professoren und S Studenten. Auf einen Professor kommen 6 Studenten.*“ Etwa die Hälfte der Befragten hatte große Schwierigkeiten die gesuchte Formel $6\ P = S$ aufzustellen bzw. zu interpretieren.

Um die Ursachen von Schülerfehlern beim Umformen von Gleichungen zu erforschen, untersuchte Malle [6] die Fähigkeit von Schülern, Termstrukturen in Formeln zu erkennen. Die Schüler wurden aufgefordert, in Formeln wie $a / b - c \cdot d$, Teilterme durch Einkringeln zu identifizieren (hier also a / b und $c \cdot d$, aber nicht $b - c$). Es zeigte sich, dass etwa die Hälfte der Schüler in der Lage war, ihre Einkringelungen sinnvoll zu begründen. Auffallend häufig wurden „bekannte“ Terme wie z. B. $a^2 + b^2$ als zusammengehörig empfunden und eingekringelt, auch wenn dies in der betreffenden Formel nicht gerechtfertigt war.

In einem theoretischen Ansatz versuchte Sherin [7] einen kognitionspsychologisch orientierten Rahmen für die Beschreibung des Formelverständnisses und (mehr noch) der Konstruktion eigener Formeln zu finden. Er entwarf dazu das Konzept der „symbolischen Formen“. Diese können als strukturelle Grundbausteine einer Formel aufgefasst werden, die jeweils mit einem konzeptuellen Schema verknüpft sind. Wenn sich z. B. in einem Problem der Mechanik zwei gegeneinander gerichtete Kräfte gegenseitig aufheben, kann dies in einer Formel ausgedrückt werden, deren mathematische Gestalt der symbolischen Form „competing terms" (Notation: [□ ± □ ± ...]) entspricht. Andere symbolische Formen sind „parts of a whole" (Summe verschiedener Terme; Notation: [□ + □ + ...]), „dependence" (Notation [... x ...]) oder auch „dying away" (Notation [e^{-x}]). In einer Interviewstudie mit Studierenden fand er Belege für die Verwendung symbolischer Formen. Zur Beschreibung der Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung war Sherins Ansatz dagegen nicht hilfreich (möglicherweise waren die hier verwendeten Formeln dazu nicht komplex genug).

Um das Erfassen physikalischer Formeln zu beschreiben, erscheint uns der aus der Lernpsychologie wohlbekannte Begriff des Chunks sinnvoll. Damit bezeichnet man eine bedeutungstragende Informationseinheit, die aus einer Gruppe von Buchstaben, Wörtern, Zahlen oder anderen Items bestehen kann (vgl. z. B. Zimbardo [8]). Das Erfassen komplexerer Strukturen ist eng mit der Fähigkeit zum Zusammenfassen von Einheiten (Chunking) verbunden. In einer bekannt gewordenen Untersuchung verglichen Chase und Simon [9] die Fähigkeit von Schachexperten und Schachnovizen, kurzzeitig präsentierte Spielstellungen auf dem Schachbrett aus dem Gedächtnis zu rekonstruieren. Nur bei sinnvollen (aus tatsächlichen Schachspielen entnommenen) Figurenkonstellationen, nicht aber bei zufälligen Konstellationen, zeigte sich ein deutlicher Behaltensvorteil mit zunehmender Expertise. Experten waren in der Lage, die Figuren effektiv zu sinnvollen größeren Einheiten zu gruppieren und diese Einheiten (Chunks) im Gedächtnis zu speichern.

2. Anlage der Untersuchung

Die folgenden drei Forschungsfragen dienten als Ausgangspunkt der Untersuchung:

1. Werden Formeln bei Anwendern in Untereinheiten oder immer als Ganzes wahrgenommen?
2. Falls es Untereinheiten gibt, lassen sich diese in Kategorien zusammenfassen?
3. Sind die Probanden in der Lage, den Inhalt einer Formel zu interpretieren?

2.1. Chunks und Strukturelemente in Formeln

Die vorliegende Arbeit berichtet von einer explorativen Studie zur Frage, ob und wie Schülerinnen und Schüler Teile von Formeln mental zusammenfassen. Wir unterscheiden dabei zwei Ebenen.

Wir sprechen von *Chunks*, wenn zwei oder mehr Zeichen in *einer* Formel mental zusammengefasst werden, weil sie sich gemeinsam begrifflich interpretieren lassen. So steht z. B. die Einheit „$2\pi r$" für „Umfang eines Kreises", und auch der Term „$4\pi\epsilon_0$" kann bei einem erfahrenen Formelleser als Chunk aufgefasst werden (ohne dass er diesen unbedingt mit einem Namen bezeichnen würde).

Als *Strukturelemente* bezeichnen wir Terme, die eine ähnliche „Aufgabe" in *verschiedenen* Formeln erfüllen, etwa „numerische Vorfaktoren", „Materialkonstanten", Terme, die eine Orts- oder Zeitabhängigkeit beschreiben, usw.

Sowohl Chunks als auch Strukturelemente sind nicht eindeutig und ein für allemal festgelegt, sondern kontextabhängig. Wenn es auch eine „Standardinterpretation" geben mag, hängt die Aufgliederung einer Formel doch vom gegebenen Kontext ab. So wird man in der Gleichung für die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ den Ortsfaktor g normalerweise als strukturelles Element „Konstante" auffassen, nicht jedoch in einem Zusammenhang, in dem es um die Messung von g geht. Die Bedeutung ist somit kontextbezogen.

2.2. Konzeption der Befragung

Die Untersuchung wurde mit Schülerinnen und Schülern aus den Jahrgangsstufen 12 und 13 durchgeführt. Sie gliederte sich in drei Teile, die zusammen etwa 45 Minuten dauerten und zur Auswertung auf Video aufgezeichnet wurden:

a) Zerschneiden von Formeln

Die Probanden wurden aufgefordert, ihnen auf Papier vorgelegte Formeln mit der Schere so zu zerschneiden, dass ihre Bestandteile nach vom Probanden selbst gewählten Kriterien sortiert werden konnten. Dabei sollte erläutert werden, welche Gründe für die Sortierung ausschlaggebend waren. Dieser Vorgang wurde für zwei Formeln wiederholt, sodass überprüft werden konnte, ob sich wiederkehrende Muster der Sortierung und Benennung identifizieren lassen.

b) Ordnen der Formelbestandteile

Im zweiten Teil der Aufgabe sollten die Probanden aus den Bestandteilen die Formeln wieder „zusammenpuzzeln". In der den Probanden vorgelegten Version war die Anordnung der Terme unkonventionell (s. u.). Die Fragestellung in diesem Teil war, ob sich Schemata erkennen lassen, nach denen die Probanden die Formeln zusammensetzen.

Versuchen sie, die ihnen vorgelegte Form zu rekonstruieren oder bringen sie die ihnen bekannten Formeln in eine „vertraute" Form?

Im Hintergrund steht wieder der Versuch Chunks zu identifizieren, also Untereinheiten, welche die Probanden als zusammengehörig betrachten.

c*) Beschreiben des Formelinhalts*

Schließlich sollte der physikalische Inhalt der Formel in Worte gefasst werden. Dabei sollten die Formelsymbole mit physikalischen Begriffen benannt werden und der physikalische Zusammenhang hinter der mathematischen Gestalt der Formel beschrieben werden.

Es handelte sich um halbstandardisierte Interviews (vgl. Flick [10]), die eine offene Gesprächsführung zulassen. Den Befragten wurde am Anfang Zeit gegeben, sich mit der Aufgabe und den Formeln auseinanderzusetzen. Erst nachdem Probleme auftraten, wurden individuelle Hilfen gegeben, die zum direkten Nachdenken anregen sollten. Eine offene Gesprächsführung erwies sich als sinnvoll, da so nicht die Vorstellungen des Interviewers auf den Probanden übertragen wurden. In Teil b), wo die zerlegten Formeln wieder zusammengesetzt wurden, wurde eine abgewandelte Form der Struktur-Lege-Technik angewandt. Auf eine vollständige Transkription der Interviews wurde verzichtet.

2.3. Probanden

Bei den 11 Probanden handelte es sich um Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufen 12 und 13 aus zwei verschiedenen Gymnasien und einer IGS, die an der Untersuchung freiwillig teilnahmen. Fünf von ihnen besuchten den Grundkurs Physik, sechs den Leistungskurs. Ihr Notenspektrum reichte von 5 bis 15 Punkten im Grundkurs und 6 bis 13 Punkten im Leistungskurs.

2.4. Auswahl der Formeln

Die Auswahl der zu bearbeitenden Formeln wurde nach folgenden Gesichtspunkten vorgenommen:

- Die Länge der Formeln sollte variieren.
- Ihre Struktur sollte nicht zu einfach sein (komplexer als einfache Proportionalität zweier Größen), um den Schülerinnen und Schülern Gelegenheit zu geben Chunks zu bilden.
- Außer Zahlen und Buchstaben sollten auch „ungewöhnliche Symbole“ (griechische Buchstaben, Indizes, …) vorkommen.
- Darüber hinaus sollten die Formeln den Probanden wenigstens von den Symbolen her bekannt sein.

Vor allem das letzte Kriterium schränkte die Auswahl der Formeln auf wenige Möglichkeiten ein (Lehrplaninhalte der Jahrgangsstufen 10-12). Aus zeitlichen Gründen erschien es angebracht, nicht mehr als drei Formeln von den Probanden untersuchen zu lassen. In der Untersuchung wurden die drei folgenden Formeln verwendet:

$$W = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 , \qquad \{1\}$$

$$B = \mu_0 \cdot \mu_\mathrm{r} \cdot \frac{I}{2\,\pi\, r} , \qquad \{2\}$$

$$B = \mu_0 \cdot \mu_\mathrm{r} \cdot \frac{n^2}{l} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} . \qquad \{3\}$$

Während die beiden ersten Formeln aus dem Standardstoff der Jahrgangsstufen 10 bzw. 12 stammen (Energie einer gespannten Feder; Feld eines stromdurchflossenen Drahtes), ist die dritte Formel den Probanden mit Sicherheit unbekannt, weil physikalisch falsch. Sie ist aus Versatzstücken anderer Formeln zusammengesetzt und schon die Einheitenkontrolle zeigt, dass sie nicht richtig sein kann. In struktureller Hinsicht gibt sie Aufschluss über den Umgang der Probanden mit unbekannten Formeln. Die Interpretationsversuche der Probanden zeigen, ob sie den Formelsymbolen genügend physikalischen Sinn unterlegen können, um im Vergleich mit ihrem Vorwissen zu bemerken, dass „hier etwas nicht stimmt“.

Da die Probanden die Formeln im zweiten Teil der Untersuchung nach ihren Vorstellungen zusammensetzen sollten, wurden sie ihnen nicht in der „Standardform“ (1) – (3) präsentiert, sondern mit einer unkonventionellen Anordnung der Terme:

$$W = D \cdot \frac{1}{2} \cdot s^2 , \qquad \{4\}$$

$$B = \frac{\mu_\mathrm{r} \cdot I \cdot \mu_0}{\pi \cdot r \cdot 2} , \qquad \{5\}$$

$$B = \frac{n^2 \cdot \mu_0 \cdot \Delta I \cdot \mu_\mathrm{r}}{\Delta t \cdot l} . \qquad \{6\}$$

3. Ergebnisse

3.1. Zerschneiden der Formeln

Im ersten Teil der Untersuchung wurden die Probanden aufgefordert, die drei Formeln zu zerschneiden und neu zu sortieren. Dabei wurde betont, dass man hier „nichts falsch machen“ könne. Es liege völlig in ihrem Ermessen, ob sie die Formel in mehrere Terme zerschnitten oder sie als Ganzes beließen.

Diejenigen „Formelschnipsel“, die aus mehr als einem Term bestehen, können mit den von den Probanden gebildeten Chunks identifiziert werden. Die mündlichen Äußerungen der Probanden geben hierüber teilweise Aufschluss. In stärkerem Maße beziehen sie sich jedoch auf die Strukturelemente der verschiedenen Formeln.

Tabelle 1 gibt eine Übersicht über das Antwortverhalten der Probanden. Die von den Probanden identifizierten Strukturelemente wurden von uns in Kategorien eingeordnet. Es ließen sich sieben benennbare Kategorien identifizieren. Kategorie 1 bis 3 (Zahlen, Konstanten, Variablen) lassen sich unter dem Begriff „Oberflächenmerkmale“ zusammenfassen, Kategorie 4 bis 6 unter „Funktion“ (dies umfasst z. B. Ergebnisse der Berechnung, abhängige Variablen und die Einordnung nach der mathematischen Funktion, wie „Ableitungen“). Kategorie 7 schließlich enthält diejenigen Einheiten, die nach ihrer physikalischen Bedeutung eingeordnet wurden. In der letzten Kategorie (Sonstiges) wurden vor allem unklare Formulierungen eingeordnet. Fünf der identifizierten Strukturelemente konnten zwei Kategorien zugeordnet werden.

	Oberflächenmerkmale			Funktion			Bedeutung	Sonstige
Proband	1. Zahlen	2. Konstante	3. Variablen	4. abhängig	5. mathematisch	6. Ergebnis	7. physikalisch	8. unklar
Linda (12. GK, 5 P.)						*„Vorm Gleich“* B, B, W		*„Die rechten Seiten der B-Formeln kann man gleichsetzen.“* *„Die rechte Seite der W-Formel“*
Regina (12. GK, 10 P.)		*„Bestimmte Zahlen“* μ_0, μ_r, π, μ	*„Beliebig, nein, was man bestimmen muss oder was vorgegeben ist“* W, B, I, l			*„Beliebig, nein, was man bestimmen muss oder was vorgegeben ist“* W, B, I, l		*„$\frac{1}{2}$ kann niemals alleine stehen“* $\frac{D}{2}$, $r\cdot 2$, n^2, s^2 *„Die sehen ähnlich aus“* ΔI, Δt
Tamara (12. GK, 7 P.)	*„Zahlen, Anzahlen“* n^2, 2, $\frac{1}{2}$	*„Naturkonstanten“* μ_0, μ_r	*„Messbare Längen oder Strecken“* l, s^2, r		*„Rechenhilfen“* π		*„Messbare Längen oder Strecken“* l, s^2, r	*„Übrige“* B, W, D, I
Paula (12. LK, 13 P.)		*„Konstante, die immer konstant sind“* 2, $\frac{1}{2}$, μ_0, π *„Spezifische Konstanten“* μ_r	*„Veränderliche Größen; leicht zu ändern“* ΔI, Δt, I, s^2 *„Veränderliche Größen, nicht im Versuch veränderbar“* n^2, r, l	*„Nicht nur eine Sache, die man verändert; die setzen sich aus mehreren zusammen.“* W, B, B		*„Nicht nur eine Sache, die man verändert; die setzen sich aus mehreren zusammen.“* W, B, B		
Silke (12. LK, 6 P.)	*„Normale Zahlen oder Zeichen, die für Zahlen stehen“* 2, $\frac{1}{2}$, π, D				*„Ableitung“* ΔI, Δt, $\frac{\Delta I}{\Delta t}$		*„Alles, was mit einem Magnetfeld zu tun hat“* μ_0, μ_r, n^2, B *„Entfernungen“* s^2, r, l *„Elektrische Arbeit“* W, I	
Charly (13. GK, 7 P.)		*„Konstanten, feste Werte“* μ_0, μ_r, π, D	*„Nicht festgelegte, einstellbare Werte“* I, ΔI	*„Sachen, von denen etwas abhängig ist“* l, $\pi\cdot r\cdot 2$, s^2, Δt		*„Sachen, die gefragt sind“* B, B, W		
Dennis (12. GK, 15 P.)	*„Zahlen“* 2, $\frac{1}{2}$, n^2	*„Konstanten“* μ_0, μ_r	*„Unabhängige Variablen“* $\pi\cdot r$, s^2, l		Erst später im Gespräch als *„Durchschnittswerte“* benannt ΔI, Δt	*„Größen, die man mit den unabhängigen Variablen ausrechnet“* W, B, B, D		
John (12. LK, 3 P.)		*„Konstanten“* μ_0, μ_r, π, 2, $\frac{1}{2}$		*„Einheiten, die auf ein Feld einwirken“* l, r, n^2, s^2			*„Magnetfelder“* B, B *„Stromstärken“* I, ΔI *„Einheiten, die auf ein Feld einwirken“* l, r, n^2, s^2	*„Überbleibsel“* D, W, Δt
Lukas (12. LK, 9 P.)		*„Konstanten“* μ_0, 2, $\frac{1}{2}$, π				*„Linker Teil der Gleichung, bzw. f(x)“* B, B, W	*„Dinge, die man sehen kann“* n^2, s^2, l, r *„Dinge, die man nicht sehen kann“* ΔI, Δt, I	*„Nicht so einfach“* D, μ_r *„Dinge, die man sehen kann“* n^2, s^2, l, r *„Dinge, die man nicht sehen kann“* ΔI, Δt, I
Michael (13. LK, 12 P.)	*„Konstante, Zahlen“* 2, $\frac{1}{2}$, π	*„Spezifische Konstanten“* μ_0, μ_r, n^2, D		*„Alles, was eine bestimmte Stärke angibt“* I, W, B	*„Differenzen“* ΔI, Δt		*„Längen, Strecken“* r, s^2, l	
Theo (13. LK, 5 P.)		*„Konstante“* μ_0, 2, $\frac{1}{2}$, π					*„Materialabhängig“* μ_0, μ_r, D, n^2, l, r	unbenannt B, B unbenannt W unbenannt ΔI, Δt

Zur Illustration sollen einige Schüleräußerungen detaillierter vorgestellt werden:

LINDA (12. GK, 5 P.) wollte als Einzige die drei Gleichungen nicht in ihre Bestandteile zerlegen, sondern sie unterschied lediglich in die Kategorien *„vorm Gleich“*, *„die rechte Seite der B-Formeln (kann man gleichsetzen)“* und *„die rechte Seite der W-Formel“*.

SILKE (12. LK, 6 P.) sortierte die Formelzeichen nach physikalisch-thematischen Gesichtspunkten. Ihre erste Gruppe hieß *„alles, was irgendwie mit Magnetfeld und Magnet zu tun hat“*. Zu ihr gehörten μ_0, n^2, μ_r und B. Danach bildete sie die Gruppe *„normale Zahlen oder Zeichen, die für Zahlen stehen“*. Hierzu zählten ½, 2, π und D. Einen weiteren Stapel bildete sie aus den *„Entfernungen“* s^2, r und l. W und I wurden zusammengefasst zur *„elektrischen Arbeit“*. In der fünften Gruppe erkannte SILKE als Einzige auf Anhieb, dass $\Delta I / \Delta t$ einen Differenzenquotienten bildet und nannte diese Gruppe daher *„Ableitungen“*. Auf die Frage nach einer weiteren Möglichkeit der Sortierung antwortete SILKE, man könne auch noch einen Feder-Stapel erstellen. Sie wäre demnach auch weiterhin eher thematisch vorgegangen.

MICHAEL (13. LK, 12 P.) ging auffallend entschlossen und souverän beim Sortieren der Formeln vor. Er zerschnitt die Formeln schnell in ihre Bestandteile und bestimmte sofort 2, ½ und π als *„konstante Zahlen“*. Danach suchte er zielstrebig die *„spezifischen Konstanten“* μ_r, μ_0, n^2 und D. Die Zeichen r, s^2 und l bezeichnete er als *„Längen und Strecken“*. Als nächste Einheit wurden I, W und B als *„alles, was eine bestimmte Stärke angibt“* zusammengelegt.

Übrig blieben ΔI und Δt, von denen er nicht genau wusste, wo er sie zuordnen sollte. Nach kurzer Bedenkzeit befand er, dass „Differenzen“ eigentlich nicht so recht zu den anderen passen. Sie bekamen daher ihren eigenen Stapel. Nachdem die spezifischen Konstanten noch einmal durchgesprochen und in ihrer Bedeutung erklärt wurden, legte er μ_0 mit zur ersten Gruppe *„konstante Zahlen“*. Auf die Frage, ob es eine andere Möglichkeit für ihn gäbe, die Formeln zu sortieren, antwortete er mit einem entschiedenen *Nein*.

3.2. Umstrukturieren der Formeln

In diesem Teil der Untersuchung sollten die Probanden jede der drei beschriebenen Formeln in eine ihnen sinnvoll erscheinende Reihenfolge umstrukturieren, gewissermaßen aus den ausgeschnittenen Teilen wieder „zusammenpuzzeln“. Tabelle 2 zeigt die Ergebnisse.

Proband \ Formel	$W=\frac{1}{2}\cdot D\cdot s^2$	$B=\frac{\mu_r\cdot I\cdot\mu_0}{\pi\cdot r\cdot 2}$	$B=\frac{n^2\cdot\mu_0\cdot\Delta I\cdot\mu_r}{\Delta t\cdot l}$
LINDA (12. GK, 5 P.)	„Ich würde die schon so lassen …“		
REGINA (12. GK, 10 P.)	hat nicht umstrukturiert		
TAMARA (12. GK, 7 P.)	$W=\frac{1}{2}\cdot D\cdot s^2$	$B=\frac{\mu_r\cdot\mu_0\cdot I}{\pi\cdot r\cdot 2}$	$B=\frac{\mu_r\cdot\mu_0\cdot n^2}{l}\frac{\Delta I}{\Delta t}$
PAULA (12. LK, 13 P.)	$W=\frac{1}{2}\cdot D\cdot s^2$	$B=\mu_0\cdot\mu_r\cdot\frac{I}{2\pi r}$	$B(t)=\mu_0\cdot\mu_r\cdot\frac{n^2}{l}\cdot\dot{I}$
SILKE (12. LK, 6 P.)	$W=\frac{1}{2}\cdot D\cdot s^2$	$B=\mu_0\cdot\mu_r\cdot\frac{I}{\pi r\cdot 2}$	$B=\mu_0\cdot\mu_r\cdot\frac{n^2\cdot\Delta I}{l\cdot\Delta t}$
CHARLY (13. GK, 7 P.)	hat nicht umstrukturiert		
DENNIS (12. GK, 15 P.)	„Die Reihenfolge ist egal“		
JOHN (12. LK, 3 P.)	$W=\frac{1}{2}\cdot D\cdot s^2$	$B=\frac{\mu_r\cdot\mu_0\cdot I}{2\pi r}$	$B=\frac{\mu_0\cdot\mu_r\cdot n^2\cdot\Delta I}{l\cdot\Delta t}$
LUKAS (12. LK, 9 P.)	$W=\frac{1}{2}\cdot D\cdot s^2$	$B=\frac{\mu_0\cdot\mu_r\cdot I}{2\cdot\pi\cdot r}$	$B=\mu_0\cdot\mu_r\cdot\frac{n^2\cdot\Delta I}{l\cdot\Delta t}$
MICHAEL (13. LK, 12 P.)	$W=\frac{1}{2}\cdot D\cdot s^2$	$B=\mu_0\cdot\mu_r\cdot\frac{I}{2\cdot\pi\cdot r}$	$B=\mu_0\cdot\mu_r\cdot\frac{n^2\cdot\Delta I}{l\cdot\Delta t}$ (erkannte die Formel als falsch)
THEO (13. LK, 5 P.)	„Ist schon so lange her“		

Tab. 2: Resultate des „Zusammenpuzzelns“ der Formeln

Fünf der Probanden wollten die Formeln so belassen, wie sie waren – dies jedoch aus unterschiedlichen Gründen. CHARLY und REGINA wussten mit der Aufgabenstellung nichts anzufangen und hielten es nicht für notwendig, die Formeln umzustellen. LINDA ging noch einen Schritt weiter und wollte die Formeln bewusst so lassen, wie sie waren: *„Na ja, ich würde die Formeln schon so lassen, weil das ja Formeln sind, so wie ich Werte berechnen kann."* Nachdem ihr erklärt wurde, dass die Formeln bewusst verändert wurden und nicht so in der Formelsammlung stehen, merkte sie jedoch an: *„Die Naturkonstanten schreib ich nach vorne, weil, dann hab ich das, was ich raussuchen muss, gleich beieinander."*

Die Probanden, welche die Formeln umstrukturiert haben, entschieden sich ausnahmslos dafür, die Formel, die die Energie der gespannten Feder beschreibt, in folgender Form darzustellen:

$$W = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 . \qquad \{7\}$$

Für die Formel, die das Feld um einen stromdurchflossenen Leiter beschreibt, gab es im Wesentlichen zwei verschiedene Versionen. Entweder wurden die Konstanten μ_0 und μ_r vor den Bruchstrich geschrieben (3 Probanden) oder die gesamte rechte Seite der Formel wurde auf bzw. unter einen Bruchstrich gesetzt (ebenfalls 3 Probanden). Der Nenner $\pi r2$ wurde teilweise in der Reihenfolge beibehalten, aber auch in der aus der Formelsammlung bekannten Darstellung.

Mit Ausnahme von JOHN sortierten alle Probanden, die überhaupt die Formel umstrukturierten, den Differenzenquotienten an das Ende des Bruchstrichs. PAULA, SILKE und MICHAEL erkannten die Bedeutung des Differenzenquotienten und fügten ihn bewusst zusammen. PAULA ersetzte $\Delta I / \Delta t$ durch $\dot{I}$. JOHN, THEO und LUKAS hingegen schrieben den Differenzenquotienten zwar auch untereinander, taten dieses aber aus rein ästhetischen Gründen, was sie auf Nachfrage auch so bestätigten.

MICHAEL bemerkte, dass Formel (6) nicht stimmen kann. Er meinte, dass das $\Delta I / \Delta t$ am Ende der Gleichung auf der linken Seite ein $\dot{B}$ erfordern würde, und fragte, ob der Punkt denn mit Absicht fehle.

Diese Einteilung deckt sich mit den Ergebnissen der Untersuchung von Strahl *et al.* [11, 12], in der mehrere Anordnungen von Formeln vorgegeben wurden und die Probanden sich für eine Schreibweise entscheiden sollten. Hierbei entschieden sie sich entweder für einen durchgehenden Bruchstrich oder für die Konstanten am Anfang der Formel.

3.3. Interpretieren des Inhalts der Formeln

Nachdem die Probanden die Formeln in eine von ihnen bevorzugte Reihenfolge umgeschrieben hatten, wurden sie gebeten, den physikalischen Inhalt der Formeln mit eigenen Worten wiederzugeben.

Exemplarisch geben wir das Antwortverhalten von drei Probanden wieder.

LINDA (12. GK, 5 P.) konnte die meisten Symbole nicht benennen, wusste jedoch zur ersten Formel: *„W ist die Energie einer Feder, je nach Auslenkung s."* Zu den anderen beiden Formeln konnte sie nichts sagen.

SILKE (12. LK, 6 P.) konntedie Symbole weitgehend zuordnen und erkannte die erste Formel als *„die Arbeit an einer Feder"*. Zu den anderen Formeln sagte sie lediglich: *„Ich kenne die Formel nicht, also kann ich nichts sagen."*

MICHAEL (13. LK, 12 P.) hatte keine Schwierigkeiten, den Symbolen Begriffe zuzuordnen. Er beschrieb die erste Formel als „*die Energie einer Feder, wenn man sie um ein bestimmtes s auslenkt*". Bei der zweiten Formel musste er zwar ein wenig überlegen, schloss dann aber, dass diese die Flussdichte in einem Abstand *r* zu einer Spule „*oder was auch immer das Feld erzeugt*" beschreibt.

Bei der dritten Formel schloss MICHAEL anhand des Differenzenquotienten: „*Das ist die Steigung, wenn man I gegen t aufträgt. Für Δt gegen 0 führt das dazu, dass der Bruch gegen unendlich geht. Nein! Das ist die Tangentensteigung ... Ladungsdichte ... Also die Stromstärke gibt doch an, wie viel Ladungen in einem bestimmten Zeitraum durch einen Leiterquerschnitt gehen. Wenn man das nach der Zeit ableitet ... hm, ja ...*", er überlegte eine Weile und schloss dann weiter: *„... die magnetische Flussdichte vom Differenzenquotienten abhängt ... da geht's um ein sich änderndes Feld ... nee, das kann nicht sein*". Daraufhin stellte er fest, dass ein sich ändernder Strom auch eine Änderung des Magnetfeldes bedeuten würde, was – so MICHAEL– ein $\dot{B}$erfordern würde. Damit war er der Einzige, der so weit in die inhaltliche Deutung der Formel vordrang,dass er mit Hilfe seines Vorwissens auf einen Fehler inder Formel schließen konnte.

Insgesamt konnten die meisten der Befragten nur wenige Teile der Formel benennen. Noch schwieriger erwies sich die Interpretation. Es zeigte sich, dass Probanden mit besseren Noten besser mit dem Inhalt umgehen konnten.

4. Interpretation der Ergebnisse

4.1. Strukturelemente & Chunks

Es lässt sich feststellen, dass 10 von 11 Befragten bestimmte Strukturelemente identifizierten, wie Zahlen, Konstanten und Variablen. Das Erkennen von Konstanten ist ein erster Schritt zur Fähigkeit, Wichtiges von Unwichtigem zu trennen und die „relevanten Terme" in einer Formel zu erkennen. 10 von 11 Probanden ordneten Formelteile in funktionale Kategorien ein, wie z. B. Abhängigkeiten. Auffällig ist, dass 6 Probanden das „Ergebnis" als eigene Kategorie benannten. 5 Befragte sortierten Teile der Formeln nach ihrer physikalischen Bedeutung.

Im zweiten Untersuchungsteil zeigte sich, dass der Differenzenquotient von 6 der Probanden als Strukturelement erkannt wurde (wenn auch 3 davon nur ästhetische Gründe dafür angaben).

Bei der geringen Zahl der Formeln, die den Probanden vorgelegt wurden, gab es nur wenige Möglichkeiten zur Bildung von Chunks.

Die bei REGINA und DENNIS erkennbare Ablehnung, bestimmte Formelsymbole zu trennen, („π *alleine gibt ja keinen Sinn*“) ist ein erstes Anzeichen für das Identifizieren zusammengehöriger Einheiten. Von beiden werden jedoch keine inhaltlichen Interpretationen oder Benennungen der „zusammengehörigen“ Formelsymbole vorgenommen.

Die Chunks „Umfang eines Kreises“ und „Änderung der Stromstärke“ wurden jeweils von zwei Probanden erkannt.

4.2. Kategorien

Die Unterteilungen der Formeln, welche die einzelnen Befragten zusammenstellten, lassen sich in allgemeinere Kategorien einordnen. Hierbei ließen sich vier Hauptbereiche (Oberflächenmerkmale, Funktion, Bedeutung und Sonstiges) finden, die sich in weitere Unterbereiche aufspalteten. Die Kategorisierung ist wahrscheinlich noch nicht abgeschlossen und muss sich in weiteren Untersuchungen bewähren. Es zeigt sich aber, dass es möglich ist.

4.3. Interpretation der Formeln

Zwei der drei vorgelegten Formeln entstammen dem Lehrplanstoff und sollten den Probanden daher bekannt gewesen sein. Es ist zu bemerken, dass Formeln bei der Mehrzahl der Probanden nur geringe Gedächtnisspuren hinterlassen haben.

Etwa die Hälfte der Probanden konnte den Formelsymbolen ihre Bedeutung zuordnen. Die Bedeutung der Gleichung für die Energie einer gespannten Feder wurde (mit mehr oder weniger Mühe) ebenfalls etwa von der Hälfte der Probanden genannt. Dagegen konnte die Formel für das Feld eines stromdurchflossenen Drahtes nur von einem der elf Probanden (MICHAEL) in ihrer Bedeutung einigermaßen korrekt benannt werden. Nur er war auch in der Lage, die unbekannte (weil falsche) Formel (6) so weit zu interpretieren, dass er ihr eine physikalische Bedeutung beilegen und auf ihre Inkorrektheit schließen konnte.

5. Folgerungen aus dem Untersuchungsergebnis

Die geringe Zahl der Probanden, die zu einer inhaltlichen Auseinandersetzung mit den vorgelegten Formeln in der Lage waren, ist ein Anzeichen dafür, dass es im schulischen Alltag offenbar nicht nötig ist, die physikalische Aussage einer Formel verstanden zu haben.

Der mathematische Umgang mit den Formeln steht für die Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler im Vordergrund: Formeln sind zum Rechnen da. Die in den Formeln codierten Inhalte sind für sie sekundär.

Die Äußerungen mehrerer Probanden zeigen, dass es nach ihrer Meinung ausreicht, die Begriffe, die sich hinter den Symbolen einer Formel verbergen, wie Vokabeln zu lernen, um den Inhalt einer Formel verstehen zu können. Dass es ein Formelverständnis geben könnte, das über das rein mathematische hinausgeht, ist den meisten nicht bewusst. Um einen Weg zu finden, im Physikunterricht zu einem tieferen Verständnis von Formelinhalten zu gelangen, sind weitere Anstrengungen nötig, die Determinanten des Formelverständnisses aufzuklären und fördernde unterrichtliche Maßnahmen zu untersuchen.

6. Literatur

[1] Dee-Lucas, D.; Larkin, J. H. (1991): Equations in Scientific Proofs: Effects on Comprehension, In: American Educational Research Journal 28, S. 661–682

[2] Müller, R.; Heise, E. (2006): Formeln in physikalischen Texten: Einstellung und Textverständnis von Schülerinnen und Schülern, In: PhyDid 2/5, S. 62–70

[3] Malle, G. (1986): Was denken sich Schüler beim Aufstellen und Interpretieren von Formeln? In: Mathematik lehren 15/4 1986, S. 9–11

[4] Malle, G. (1986): Variable, In: Mathematik lehren 15/4 1986, S. 2–8

[5] Rosnick, P.; Clement, J. (1980): Learning without understanding: The effect of tutoring strategies on algebra misconceptions, In: Journal of Mathematical Behavior, 3, Nr. 1, S. 3–27

[6] Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Friedr. Vieweg Verlag

[7] Sherin, B. L. (2001): How Students Understand Physcis Equations, In: Cognition and Instruction 19, 479–541

[8] Zimbardo, P. G. (1995): Psychologie, Heidelberg: Springer

[9] Chase, W. G.; Simon, H. A. (1973): The mind’s eye in chess. In W. G. Chase (ed.), Visual information processing. New York: Academic Press

[10] Flick, U. (2007): Qualitative Sozialforschung. Rowohlts Enzyklopädie

[11] Strahl, A.; Müller, R. (2009): U=R·I oder R=U/I – Untersuchungen zur Darstellung von Formeln. In: CD zur DPG Frühjahrstagung – Fachverband Didaktik der Physik 2009, Nordmeier, V; Oberländer, A. (Hrsg.) Berlin

[12] Strahl, A.; Grobe, J.; Müller R. (2010): Was schreckt bei Formeln ab? – Untersuchung zur Darstellung von Formeln, In: PhyDid B (online www.phydid.de)